Leçon 148 : Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications

Références : Grifone, Gourdon, Rombaldi, Perrin

I - Théorie de la dimension
1) Familles libres, génératrices, bases
2) Existence de bases et dimension

II - Théorie du rang
1) Rang d'une application linéaire
2) Rang d'une matrice - Calcul effectif
3) Dualité

III - Applications
1) Exemples d'espaces vectoriels de dimension finie
2) Réduction des endomorphismes normaux
3) Extensions de corps

DEV 1 : Théorème des extrema liés

DEV 2 : Réduction des endomorphismes normaux

Leçon 148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications

Soit K un corps commutatif et E un K-espace vectoriel

I - Théorie de la dimension

1) Familles libres, génératrices, bases [GRi]

DEF 1 : Une famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$ de E est dite génératrice lorsque $E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$ c'est-à-dire :
$\forall x \in E$, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$

EX 2 : $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ engendre $\mathbb{R}^2$. $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = (1,-1)$ aussi.

DEF 3 : E est dit de dimension finie lorsqu'il existe une famille génératrice finie. Sinon, on dit que E est de dimension infinie.

EX 4 : K^n est de dimension finie, $\mathbb{R}[X]$ ne l'est pas

Dans toute la suite, on suppose E de dimension finie.

DEF 5 : Soit $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille d'éléments de E. On dit qu'elle est libre lorsque pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$, on a :
$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$
On dit aussi que les vecteurs sont linéairement indépendants.
Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

EX 6 : Dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $(1,1,-1)$, $(0,2,1)$ et $(0,0,5)$ forment une famille libre.

PROP 7 : Une famille $(v_1, \dots, v_p)$ est liée si et seulement si l'un au moins des vecteurs v_i appartient à l'espace vectoriel engendré par les autres.

DEF 8 : On appelle base une famille à la fois libre et génératrice

PROP 9 : Une famille $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E si et seulement si tout $x \in E$ se décompose de façon unique sur les v_i : $\exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$, $x = \sum^{n} \lambda_i v_i$.

COR 10 : Soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E. Il existe alors une bijection $\varphi_{\mathcal{B}} : E \to K^n$
$x \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

EX 11 : $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
$\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\mathcal{M}_2(K)$.

PROP 12 : • Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice
• Toute sous-famille d'une famille libre est libre

2) Existence de bases et dimension [GRi]

THM 13 : On suppose $E \neq \{0\}$ de dimension finie, soit $G = \{v_1, \dots, v_n\}$ une famille génératrice et $L \subset G$ une famille libre. Il existe alors une base $\mathcal{B}$ telle que $L \subset \mathcal{B} \subset G$.

THM 14 (base extraite incomplète) : Avec les mêmes hypothèses, de toute famille génératrice, on peut extraire une base. Toute famille libre peut être complétée de manière à former une base

LEMME 15 : Si E est engendré par n éléments, toute famille contenant plus de n éléments est liée.

THM 16 : Toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E sur K noté $\dim_K(E)$.

COR 17 : Si $\dim_K(E) = n$, toute famille ayant plus de n éléments est liée. Les familles ayant moins de n éléments ne peuvent être génératrices.

EX 18 : $\dim_K(K^n) = n$; $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$; $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$; $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$

PROP 19 : Soit $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels de dimension finie sur K. Alors $\dim_K(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim_K(E_1) + \dots + \dim_K(E_p)$

THM 20 : Si $\dim_K(E) = n$, alors toute famille génératrice ayant n éléments est une base. Toute famille libre ayant n éléments est une base.

PROP 21 : Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est de dimension finie et :
• $\dim_K(F) \leq \dim_K(E)$
• $\dim_K(F) = \dim_K(E) \iff F = E$.

II - Théorie du rang

1) Rang d'une application linéaire [GRi]

Soit E' un espace vectoriel de dimension finie

PROP 22 : Soit $f : E \to E'$ une application linéaire. Alors $f(E)$ un sous-espace vectoriel de E' appelé image de f noté $\mathrm{Im}(f)$. Sa dimension est appelé rang de f. On note $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

PROP 23 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,E')$ et $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

- Si f est injective et $(v_i)_{i\in I}$ est libre, alors $(f(v_i))_{i\in I}$ est libre dans E'
- Si f est surjective et $(v_i)_{i\in I}$ est génératrice, alors $(f(v_i))_{i\in I}$ est génératrice de E'

En particulier, si f est bijective, l'image d'une base de E est une base de E'.

THM 24 : Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

EX 25 : $\mathbb{R}_n[X]$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{n+1}$

THM 26 : (du rang) Soit $f : E \to E'$ linéaire. Alors :
$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + rg(f)$

COR 27 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,E')$ avec $\dim(E) = \dim(E')$ finie :
f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective

REM 28 : Ce résultat devient faux en dimension infinie : $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ est linéaire surjective mais non injective.

COR 28 (Grassmann) : Soit F, G deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $F+G$ et $F\cap G$ sont de dimension finie et : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F\cap G)$.

PROP 29 : Si $\dim(E) = n$ et $\dim(E') = p$, alors $\mathcal{L}(E,E') \simeq \mathcal{M}_{p,n}(K)$

DEV 1

[GOU] Analyse

THM 30 : (extrema liés) Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit l'ensemble $\Gamma = \{x \in U \,/\, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ appelés multiplicateurs de Lagrange tels que $df(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, dg_i(a)$

2) Rang d'une matrice - Calcul effectif [GRI] [GOU]

DEF 31 : On appelle rang de la famille $(v_i)_{i\in I}$ la dimension de l'espace engendré par les v_i.
On appelle rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ le rang de la famille des vecteurs colonnes de A.

PROP 32 : Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ avec $\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{B}'$ base de F, alors $rg(f) = rg(A)$.

THM 33 : (Gauss-Jordan) Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, $r = rg(A) \geq 1$. Alors, A est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

COR 34 : Deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si $rg(A) = rg(B)$.

THM 35 : Le rang d'une matrice est égal à la taille du plus grand mineur non nul de la matrice.

[GOU]

COR 36 : Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$, alors $rg(A) = rg({}^tA)$

REM 37 : En pratique, on utilise la méthode du pivot de Gauss pour échelonner et réduire la matrice et obtenir une matrice dont le rang est facile à lire. Les opérations effectuées pour cela conservent le rang.

3) Dualité dans les espaces vectoriels [GOU] [ROT]

DEF 38 : L'ensemble des formes linéaires sur E est noté E^*, c'est un K-espace vectoriel appelé espace dual.

DEF 39 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la forme linéaire e_i^* définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ s'appelle forme linéaire coordonnée d'indice i.

THM 40 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $\mathcal{B}$ et donc $\dim(E^*) = \dim(E)$. $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$

REM 41 : En dimension finie, E est isomorphe à son bidual E^{**}, mais pas en dimension infinie en général !

DEF 42 : $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dits orthogonaux lorsque $\varphi(x) = 0$
Si $A \subset E$, $A^\perp = \{\varphi \in E^* \,/\, \forall y \in A, \varphi(y) = 0\}$ l'orthogonal de A
Si $B \subset E^*$, $B^\circ = \{x \in E \,/\, \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$ l'orthogonal de B

THM 43 : Soit F un sev de E et G un sev de E^*. Alors :
$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ et $(F^\perp)^\circ = F$
$\dim(G) + \dim(G^\circ) = \dim(E)$ et $(G^\circ)^\perp = G$

COR 44 : Si $n = \dim(E)$, soient p formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ telles que $rg(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = r$. Alors $F = \bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i)$ est de dimension $n - r$.
Réciproquement, si F est un sev de E de dimension q, il existe $n-q$ formes linéaires linéairement indépendantes telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-q} \ker(\varphi_i)$

REM 45 : On obtient que tout sous-espace est une intersection d'hyperplans.

III - Applications

1) Exemples d'espaces vectoriels de dimension finie [Ant]

PROP 46 : Si $\dim(E) < \infty$, le morphisme d'algèbres pour $u \in \mathcal{L}(E)$
$\varphi : K[X] \to K[u]$, $P \mapsto P(u)$ ne saurait être injectif (car sinon $\dim(K[u]) = +\infty$) donc $\ker(\varphi)$ est un idéal de $K[X]$ et on peut définir Π_u le polynôme minimal de u comme générateur de $\ker(\varphi)$.

THM 47 : L'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées est de dimension 1 engendré par l'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to K$ définie par $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i}$ où $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} e_i$ pour tout $j \in [\![1;n]\!]$.

THM 48 : Soit une équation différentielle linéaire homogène $y' = A(t)y$ avec $A : I \to \mathcal{M}_n(K)$ continue, I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble S_H des solutions de l'équation est un espace vectoriel de dimension n.

2) Réduction des endomorphismes normaux [Equation]

DEF 49 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est normal lorsque u commute avec son adjoint u^*.

LEMME 50 : u est normal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ est normale i.e commute avec sa transposée ($K = \mathbb{R}$) ou sa transconjuguée.

LEMME 51 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u DEV 2

LEMME 52 : Si $\dim(E) = 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal sans valeur propre réelle, alors pour toute base $\mathcal{B}$ orthonormée de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $b \neq 0$.

THM 53 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal. Il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de E dans laquelle la matrice de u s'écrit $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & \varepsilon_p & & & \\ & & & R_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & R_r \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon_i \in \{-1;1\}$ $\forall i \in [\![1;p]\!]$ et $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ $\forall i \in [\![1;r]\!]$

3) Extensions de corps [PER]

Soient K et L des corps commutatifs.

DEF 54 : On dit que L est une extension de K lorsque $K \subset L$.

REM 55 : • Si K est un sous-corps de L, L est un K-espace vectoriel
• Si $\dim_K(L)$ est finie, on pose $[L:K] = \dim_K(L)$ et cet entier s'appelle le degré de L sur K.
• Si K et L sont des corps finis, on a $\#L = (\#K)^n$ avec $n = [L:K]$.

THM 56 : Soient $K \subset L \subset M$ des corps, $(e_i)_{i \in I}$ une K-base de L $(f_j)_{j \in J}$ une L-base de M. Alors, $(e_i f_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une K-base de M.

COR 57 : $[M:K] = [M:L][L:K]$ avec les notations précédentes

DEF 58 : Soit L/K une extension et $\varphi : K[T] \to L$, $P \mapsto P(\alpha)$, $\alpha \in L$.
• Si φ est injectif, α est dit transcendant sur K
• Sinon on dit que α est algébrique sur K. Le générateur de l'idéal $\ker(\varphi)$ est appelé polynôme minimal de α sur K noté $\mu_{\alpha,K}$.

EX 59 : • $\sqrt{2}$, i, $\sqrt[3]{2}$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$ et $\mu_{\sqrt{2},\mathbb{Q}} = X^2 - 2$; $\mu_{i,\mathbb{Q}} = X^2 + 1$; $\mu_{\sqrt[3]{2},\mathbb{Q}} = X^3 - 2$

THM 60 : Soit L/K une extension, $\alpha \in L$. LASSE :
1) α est algébrique sur K
2) $K[\alpha] = K(\alpha)$
3) $\dim_K(K(\alpha)) < \infty$

Dans ce cas, $\mu_{\alpha,K}$ est irréductible et $\dim_K(K(\alpha)) = \deg(\mu_{\alpha,K})$